



همسر عزیز و مهربانم

که اگر همراهی های او نبود

نگارش این کتاب هرگز به سرانجام نمی رسید.

«رسول رستمی»

همسر عزیزم

که بهترین دوست و همراه من است.

«محسن فراهانی»

مقدمه ناشر

آمار و احتمال علم خیلی جالبیه و تقریباً همه جا کاربرد داره. شک ندارم که درس آمار و احتمال می‌تونه ماجراهای کار و زندگی‌تون رو هیجان‌انگیزتر بکنه. حتی برای ازدواج هم باید آمار طرف رو بگیرید ولی این‌که اونم موافق باشه یا نه خودش یه احتمالیه! خلاصه این‌که ما هرچی آمار و احتمالاتمون دقیق‌تر باشه موفق‌تریم. پس خوبه که این درس به دربخور رو جدی بگیریم. یه سایت با حال هم بهترتون معرفی می‌کنم که اگه قبلن ندیده باشین، حتمن براتون جذابه:

www.worldometers.info/fa

این سایت آمار لحظه به لحظه بعضی از شاخص‌های انسانی کل دنیا رو می‌ده. مثلن همین الان که من این مقدمه رو می‌نویسم، جمعیت جهان ۸,۰۵۰,۴۱۳,۱۷۰ نفره که ۵,۸۰۶,۰۶۳,۳۵۰ نفرشون کاربر اینترنتی‌اند. در سال ۲۰۲۳ تا این لحظه (ساعت ۱۱:۲۳ روز ۴ مردادماه ۱۴۰۲)، ۳۸,۳۱۹,۳۱۵ تا خودرو تولید شده، در حالی که فقط ۱,۵۷۵,۵۴۸ تا کتاب جدید منتشر شده. تحلیل این داده‌ها با خودتون.

خدا کنه احتمال خوشحالیاتون صددرصد باشه.

مقدمه مؤلف

به نام خدای مهربون

سلام بچه‌ها.

اون قدیما که مدرسه می‌رفتیم، همیشه خوندن بعضی از درس‌ها برامون خیلی لذت داشت و آسون بود، اما از خوندن بعضی از درس‌ها فراری بودیم و فکر می‌کردیم اصلاً برای خوندن اون درس‌ها ساخته نشدیم و هر دقیقه از کلاس برامون به اندازه یک سال می‌گذشت. اما بعضی وقت‌ها هم بود که یک معلم دوست‌داشتنی و مهربون باعث می‌شد همه بچه‌ها عاشق همون درسی بشن که از خوندنش فرار می‌کردن و همه بهترین نمره‌هاشون رو تو همون درس می‌گرفتن!!!

یه کتاب خوب هم می‌تونه مثل یک معلم خوب آدم رو تو خوندن درس‌هاش و علاقه‌مندشدن به اون‌ها کمک کنه. کتابی که برای آمار و احتمال نوشتیم درس‌نامه‌ای ساده و روان داره و درس‌ها و نکته‌هاش همراه با مثال‌های خوب و متنوع بررسی شدن که می‌تونن به شما تو فهم بهتر درس کمک کنن. اکثر سؤال‌های کتاب درسی در درس‌نامه یا در تمرین‌های آخر فصل، حل شده و در موارد مورد نیاز تیپ‌های مختلف این سؤال‌ها هم بررسی شده.

علاوه بر سؤال‌های کتاب درسی، تمرینات کافی برای پوشش کامل همه مباحث مطرح‌شده، حل شده تا تسلط شما روی زوایای مختلف کتاب درسی بیشتر بشه. تمرینات هم در سطوح مختلف طراحی شده تا بتونید با حل سؤال‌های آسون به فرمول‌ها و نکات درسی مسلط بشید و با حل سؤال‌های سخت‌تر، ورزیده‌تر بشید. ضمناً اکثر سؤال‌های این کتاب پاسخ‌های کاملاً تشریحی دارن.

در پایان هر فصل یک آزمون جمع‌بندی داریم که با پاسخ دادن به اون‌ها میتونید میزان تسلط خودتون رو در هر فصل بسنجید. دو سری آزمون برای پایان ترم اول و چهار سری آزمون دیگه برای جمع‌بندی در پایان ترم طراحی شده که حل کردن اون‌ها قبل از امتحانات پایانی می‌تونه براتون خیلی مفید باشه و حسابی برای امتحان آمادتون کنه. سؤال‌هایی که علامت (🧠) دارن، سخت‌ترین سؤال‌های هر بخشن. اگر به کمتر از ۲۰٪ راضی نمی‌شی بعد از تسلط روی سؤال‌های دیگه، برو سراغ اون‌ها.

امیدواریم این کتاب بتونه در کنار معلم‌های خوبتون دوست خوبی براتون باشه و در یادگیری بهتر این درس کمکتون کنه. در آخر از همه دوستان خیلی سبزی به‌خصوص، آقای سیزمیدانی و آقای هاشمی عزیز و سرکار خانم جالی‌نوسی و خانم میرجعفری که با محبت و تلاش وصف‌ناپذیر ما را همراهی کردند و هم‌چنین از ویراستاران محترم آقایان ابراهیم‌نژاد و کاظمی‌بقا و خانم‌ها محمدی‌نژاد و نظری سپاس‌گزاریم.

در آخر برای همه شما دانش‌آموزان عزیز و دوست‌داشتنی که آینده‌سازان این مرز و بوم هستید آرزوی موفقیت، سلامتی و شادابی داریم.

رسول رستمی – محسن فراهانی

فهرست



۱۴

۳۴
۳۵
۴۸

آزمون جمع‌بندی فصل اول
پاسخ سؤال‌های امتحانی
پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل اول

فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات
درس ۱: آشنایی با منطق ریاضی
درس ۲: جبر مجموعه‌ها

۶۸

۷۳
۷۴
۸۷

درس ۴: پیشامد های مستقل و وابسته
آزمون جمع‌بندی فصل دوم
پاسخ سؤال‌های امتحانی
پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل دوم

فصل دوم: احتمال
درس ۱: مبانی احتمال
درس ۲: احتمال غیرهم‌شانس
درس ۳: احتمال شرطی



۱۱۲
۱۱۴
۱۲۵

آزمون جمع‌بندی فصل سوم
پاسخ سؤال‌های امتحانی
پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل سوم

فصل سوم: آمار توصیفی
درس ۱: توصیف و نمایش داده‌ها
درس ۲: معیارهای گرایش به مرکز
درس ۳: معیارهای پراکندگی

۱۴۶
۱۴۷
۱۵۱

آزمون جمع‌بندی فصل چهارم
پاسخ سؤال‌های امتحانی
پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل چهارم

فصل چهارم: آمار استنباطی
درس ۱: گردآوری داده‌ها
درس ۲: برآورد



شماره صفحه پاسخ

شماره صفحه سوال

۱۵۳
۱۵۶
۱۵۹
۱۶۴
۱۶۸
۱۷۲

۱۵۲
۱۵۵
۱۵۸
۱۶۲
۱۶۶
۱۷۰

امتحان شماره (۱): نمونه امتحان نیم‌سال اول
امتحان شماره (۲): نمونه امتحان نیم‌سال اول
امتحان شماره (۳): نمونه امتحان نیم‌سال دوم
امتحان شماره (۴): نمونه امتحان نیم‌سال دوم
امتحان شماره (۵): نمونه امتحان نیم‌سال دوم
امتحان شماره (۶): نهایی خرداد ۱۴۰۳



فصل اول

آشنایی با منطق ریاضی

گزاره

به هر جمله خبری یک گزاره می‌گوییم. هر گزاره فقط می‌تواند درست یا فقط نادرست باشد. مثلاً جملات زیر هر کدام یک گزاره هستند:

۱۵ بر ۳ بخش پذیر است. ۱

گزاره ۱ درست و گزاره ۲ نادرست است.

هر گزاره را معمولاً با حروف کوچک p, q, r, s, \dots نمایش می‌دهیم.

ارزش یک گزاره

درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش آن گزاره می‌گوییم.

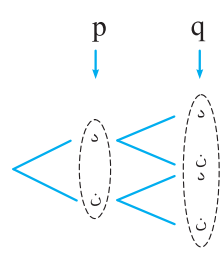
ارزش گزاره درست را با «د» یا «T» و ارزش گزاره نادرست را با «ن» یا «F» نمایش می‌دهیم. اگر دو گزاره p و q ارزش یکسان داشته باشند؛ یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست باشند، می‌نویسیم $p \equiv q$ و می‌گوییم گزاره‌های p و q معادل یا هم‌ارز هستند.

جدول ارزش گزاره‌ها

p
د
ن

ارزش هر گزاره مانند p می‌تواند درست یا نادرست باشد. این مطلب را در جدول ارزش گزاره‌ها به شکل روبه‌رو نشان می‌دهیم:

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن



اگر بخواهیم حالت‌های مختلف برای درست یا نادرست بودن دو گزاره p و q را بنویسیم، توجه به این که برای هر کدام از این گزاره‌ها ۲ حالت «د» یا «ن» را داریم؛ پس طبق اصل ضرب برای ارزش ۲ گزاره p و q در کنار هم، $2 \times 2 = 4$ حالت مختلف وجود دارد. این ۴ حالت را در جدول ارزش گزاره‌ها به شکل روبه‌رو نمایش می‌دهیم:

ارزش p ارزش q ارزش r

$2 \text{ حالت} \times 2 \text{ حالت} \times 2 \text{ حالت} = 8$

هم‌چنین برای ارزش ۳ گزاره طبق اصل ضرب $2^3 = 8$ حالت مختلف وجود دارد.

جدول ارزش گزاره‌ها برای ۳ گزاره به شکل روبه‌رو است:

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

نتیجه: جدول ارزش گزاره‌ها برای n گزاره طبق اصل ضرب 2^n سطر مختلف دارد.

$$p_1 \text{ گزاره} \quad p_2 \text{ گزاره} \quad p_3 \text{ گزاره} \quad p_n \text{ گزاره}$$

$$2^{\text{حالت}} \times 2^{\text{حالت}} \times \dots \times 2^{\text{حالت}} = 2^n$$

نقیض یک گزاره ($\sim p$)

نقیض گزاره p را به صورت « $\sim p$ » نوشته و آن را به صورت «چنین نیست که p» می‌خوانیم. ارزش گزاره « $\sim p$ » مخالف ارزش گزاره p است. به علامت « \sim » ناقض گفته می‌شود.

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

جدول ارزش گزاره $\sim p$ به صورت مقابل است:

بنابراین اگر p درست باشد، $\sim p$ نادرست و اگر p نادرست باشد، $\sim p$ درست است.

$$\left. \begin{array}{l} p: \text{باران می‌بارد.} \\ x \geq 3: q \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sim p: \text{چنین نیست که باران ببارد} \equiv \text{باران نمی‌بارد.} \\ \sim q: \text{چنین نیست که } x \geq 3 \text{ باشد} \equiv x < 3 \end{array} \right\}$$

مثال: نقیض گزاره‌های روبه‌رو را بنویسید.

پاسخ:

تذکره: نقیض نقیض یک گزاره با خود گزاره هم‌ارز است. یعنی: $\sim(\sim p) \equiv p$

گزاره‌نما

عبارت‌های خبری زیر را در نظر بگیرید:

۱) x عددی اول است. ۲) $2x^2 + 3x - 2 = 0$

۳) دو برابر یک عدد طبیعی به علاوه ۳ برابر عدد طبیعی دیگر از ۱۰ کم‌تر است. ($2x + 3y < 10$)

همان‌طور که می‌بینید درستی یا نادرستی جملات بالا را نمی‌توانیم مشخص کنیم و درستی یا نادرستی آن‌ها بستگی به مقادیری دارد که به جای متغیرهای آن‌ها یعنی x و y قرار داده می‌شود. مثلاً اگر در جمله اول به جای x عدد ۵ بگذاریم، یک گزاره درست به دست می‌آید؛ اما اگر به جای x عدد ۶ را قرار دهیم، یک گزاره نادرست خواهیم داشت.

هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر باشد و با جای‌گذاری مقادیر مختلف به جای متغیرهای آن به یک گزاره تبدیل شود را گزاره‌نما می‌گوییم.

دامنه متغیر گزاره‌نما

به مجموعه مقادیری که می‌توانیم به جای متغیرهای گزاره‌نما قرار دهیم تا گزاره‌نما به یک گزاره درست یا غلط تبدیل شود، «دامنه متغیر گزاره‌نما» می‌گوییم و آن را با D نمایش می‌دهیم.

مجموعه جواب گزاره‌نما

به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به ازای آن‌ها گزاره‌نما به یک گزاره درست تبدیل می‌شود، «مجموعه جواب گزاره‌نما» می‌گوییم و آن را با S نمایش می‌دهیم ($S \subseteq D$).

مثال: گزاره‌نمای $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$ با قراردادن هر عدد حقیقی به جای x به یک گزاره درست یا غلط تبدیل می‌شود، برای این که مجموعه‌جواب این گزاره‌نما را به دست آوریم، باید معادله را حل کنیم:

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x^2(x-1) - 4(x-1) = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2-4) = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow (x=1) \text{ یا } (x=2) \text{ یا } (x=-2)$$

بنابراین گزاره‌نما به ازای $x \in \{1, 2, -2\}$ به یک گزاره درست تبدیل می‌شود؛ پس مجموعه‌جواب گزاره‌نما $S = \{1, 2, -2\}$ است.

مثال: اگر دامنه متغیر گزاره‌نمای $1 \leq \frac{2x+1}{3} \leq -1$ مجموعه اعداد صحیح باشد، مجموعه جواب آن را بیابید.

پاسخ: گزاره‌نمای $1 \leq \frac{2x+1}{3} \leq -1$ را ساده می‌کنیم:

$$-1 \leq \frac{2x+1}{3} \leq 1 \xrightarrow{\times 3} -3 \leq 2x+1 \leq 3 \xrightarrow{-1} -4 \leq 2x \leq 2 \xrightarrow{\div 2} -2 \leq x \leq 1$$

$$S = \{-2, -1, 0, 1\}$$

دامنه متغیر مجموعه اعداد صحیح است، پس مجموعه جواب برابر است با:

سؤال‌های امتحانی

سؤال‌هایی که علامت (🧐) دارن، سخت‌ترین سؤال‌های هر بخشن. اگر به کمتر از ۲۰ راضی نمی‌شی بعد از تسلط روی سؤال‌های دیگه، برو سراغ اون‌ها.

در جاهای خالی عدد یا علامت مناسب قرار دهید به طوری که گزاره‌های حاصل دارای ارزش درست باشند.

$$\square \times \sqrt{17} = 0 - 2$$

$$-7 \times \square = -14 - 1$$

$$7(3 - \square) = 35 - 4$$

$$5(\square - 3) = 40 - 3$$

$$\sin \alpha \square \cos \alpha, \quad 0^\circ < \alpha < 45^\circ - 6$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \square \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 5$$

ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۸- حاصل ضرب هر دو عدد متوالی صحیح، عددی زوج است.

۷- مجموع هر دو عدد اول، زوج است.

$$10 - \sqrt{2} \text{ یک عدد گویا است.}$$

۹- ۲۶۳۵۹۲۱۴۳۱ عددی اول است.

(مشابه کتاب درسی)

۱۲- عدد $5^9 + 8$ عددی اول است. 🧐

۱۱- حافظ، پزشک ایرانی است.

۱۳- عدد $2^n + 1$ یک عدد اول است. 🧐

نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید، سپس ارزش هر یک از گزاره‌های جدید را مشخص کنید.

۱۵- ۲۹ عددی اول است.

۱۴- $8 \leq 10$

۱۷- سعدی شاعر نیست.

۱۶- $a \in \{a, b, c\}$

۱۸- مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی کم‌تر از 360° است.

۱۹- نشان دهید که هم‌ارزی مقابل همواره برقرار است.

دامنه متغیر گزاره‌نماهای زیر داده شده است. مجموعه جواب هر یک را مشخص کنید.

۲۱- x سه واحد از مضارب ۷ بیشتر است. ($D = \mathbb{Z}$)

۲۰- x مضرب ۷ است. ($D = \mathbb{Z}$)

$$\frac{6x+1}{2x-5} \in \mathbb{Z} - 23 \quad \text{🧐} \quad (D = \mathbb{Z})$$

$$\frac{1}{2+x} \in \mathbb{N} - 22 \quad (D = \mathbb{Z})$$

۲۵- a فرد است. ($D = \mathbb{R}$)

۲۴- a مربع کامل است. ($D = \mathbb{Z}$)

$$2x^2 + x - 1 = 0 - 27 \quad (D = \mathbb{Z})$$

$$2x^2 + x - 1 = 0 - 26 \quad (D = \mathbb{R})$$

$$\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^3} - 29 \quad \text{🧐} \quad (D = \mathbb{R})$$

$$3^x = 0 - 28 \quad (D = \mathbb{R})$$

$$\sqrt{x+2} = -x \quad (D = \mathbb{Z}) - 31$$

$$A = \{n - n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} \quad (D = \mathbb{R}) - 30$$

۳۲- مجموعه جواب گزاره‌نمای «در پرتاب یک تاس احتمال آن که پیشامد A رخ دهد، برابر با $\frac{1}{4}$ است.» چند عضو دارد؟

۳۳- دو تاس پرتاب می‌کنیم. اگر a را عدد تاس اول و b را عدد تاس دوم در نظر بگیریم، دامنه متغیر و مجموعه جواب گزاره‌نماهای زیر چند عضو دارد؟ 🧐

(ب) $a < b$ است.

(الف) $a + b$ زوج است.

(ت) معادله درجه دوم $x^2 - ax + b = 0$ دارای ۲ ریشه حقیقی متمایز است.

(پ) a و b دو عدد متوالی‌اند.

ترکیب گزاره‌ها

اگر دو یا چند گزاره را با استفاده از رابط‌های گزاره‌ای مثل «یا»، «و»، «اگر... آن‌گاه...»، «اگر و فقط اگر» و... به هم وصل کنیم، یک گزاره مرکب ساخته می‌شود. مثلاً گزاره‌های: ۱) «مجید درس نمی‌خواند» و «حسین شاگرد اول است.» و ۲) «۵ عددی زوج است» یا «۵ عددی اول است»، با ترکیب ۲ گزاره به وسیله رابط‌های «و» و «یا» ساخته شده‌اند.

ترکیب عطفی دو گزاره ($p \wedge q$)

ترکیب « p و « q » که به صورت « $p \wedge q$ » نمایش می‌دهیم را ترکیب عطفی دو گزاره p و q می‌گوییم. رابط منطقی «و» که به صورت « \wedge » نوشته می‌شود را «عاطف» می‌گوییم.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

مثال p : ایران به جام جهانی فوتبال صعود کرد.
 q : علی از دانشگاه فارغ التحصیل شد.
 $p \wedge q$: ایران به جام جهانی فوتبال صعود کرد و علی از دانشگاه فارغ التحصیل شد.

تنها زمانی که ایران به جام جهانی صعود کند و علی از دانشگاه فارغ التحصیل شود، عبارت $p \wedge q$ درست است و اگر یکی از این گزاره‌ها یا هر دوی آن‌ها نادرست باشد، $p \wedge q$ نادرست خواهد بود.
نتیجه: ارزش گزاره یعنی مرکب « $p \wedge q$ » تنها زمانی درست است که هر دو گزاره p و q درست باشند. جدول ارزش گزاره‌ها برای $p \wedge q$ به صورت مقابل است:

تذکره: ترکیب عطفی n گزاره یعنی $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n$ تنها زمانی درست است که همه گزاره‌ها درست باشند و اگر تنها یکی از آن‌ها نادرست باشد این عبارت نادرست خواهد بود.

ترکیب فصلی دو گزاره ($p \vee q$)

عبارت « p یا q » که به صورت « $p \vee q$ » می‌نویسیم را ترکیب فصلی دو گزاره p و q می‌گوییم. رابط منطقی «یا» که به صورت « \vee » نوشته می‌شود را «فاصل» می‌گوییم.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

مثال p : علی معلم است.
 q : علی مغازه دارد.
 $p \vee q$: علی معلم است یا علی مغازه دارد.

اگر «علی معلم باشد»، یا «مغازه داشته باشد» یا «هم معلم باشد و هم مغازه داشته باشد»، عبارت $p \vee q$ درست است و ارزش گزاره $p \vee q$ تنها زمانی نادرست است که علی معلم نباشد و مغازه هم نداشته باشد. یعنی هر دو گزاره p و q نادرست باشند.
نتیجه: بنابراین ارزش گزاره مرکب $p \vee q$ تنها زمانی نادرست است که p و q هر دو نادرست باشند. جدول ارزش گزاره $p \vee q$ به صورت روبه‌رو است:

تذکره: ممکن است چند گزاره به وسیله ترکیب فصلی به هم وصل شوند، در این صورت گزاره $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$ زمانی درست است که لاقلاً یکی از گزاره‌ها درست باشد. این گزاره تنها زمانی نادرست است که همه گزاره‌ها نادرست باشند.

مثال: ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $(2 < 3) \wedge (3 + 4 = 12)$
 ب) $(-3 \in \mathbb{N}) \vee (2 \in \mathbb{Q})$

پاسخ: الف) $(2 < 3) \wedge (3 + 4 = 12) \equiv T \wedge F \equiv F$
 ب) $(-3 \in \mathbb{N}) \vee (2 \in \mathbb{Q}) \equiv F \vee T \equiv T$

هم‌ارزی‌های مهم در ترکیب فصلی و عطفی

الف قوانین و هم‌ارزی‌های زیر را که به راحتی با جدول ارزش گزاره‌ها قابل اثبات هستند را حتماً حفظ کنید.

- | | |
|--|---|
| <p>۱) $\begin{cases} p \wedge q \equiv q \wedge p \\ p \vee q \equiv q \vee p \end{cases}$ (قوانین جابه‌جایی)</p> | <p>۲) $\begin{cases} (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \\ (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \end{cases}$ (قوانین شرکت‌پذیری)</p> |
| <p>۳) $\begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$ (قوانین توزیع‌پذیری یا پخشی)</p> | <p>۴) $\begin{cases} p \vee (p \wedge q) \equiv p \\ p \wedge (p \vee q) \equiv p \end{cases}$ (قوانین جذب یا هم‌پوشانی)</p> |
| <p>۵) $\begin{cases} p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q \\ p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q \end{cases}$ (قوانین شبه جذب)</p> | <p>۶) $\begin{cases} \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \\ \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \end{cases}$ (قوانین دمورگان)</p> |

مثال: خواص زیر را با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها ثابت کنید.

۱) توزیع پذیری $\begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$

۲) شبه جذب $\begin{cases} p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q \\ p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q \end{cases}$

۳) دمورگان $\begin{cases} \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \\ \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \end{cases}$

پاسخ: اثبات قانون توزیع پذیری: چون با سه گزاره p, q, r سر و کار داریم، پس طبق اصل ضرب ۸ حالت برای درستی یا نادرستی این سه گزاره وجود دارد:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

چون دو ستون آخر یکسان شده‌اند، پس: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.
رابطه دوم در توزیع پذیری هم به همین ترتیب اثبات می‌شود.

۲) اثبات قانون شبه جذب: ابتدا ارزش گزاره‌های p و q را نوشته، سپس ارزش گزاره‌هایی که مورد نیاز است را در جدول به دست می‌آوریم:

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\sim p \vee q$	$\sim p \wedge q$	$p \vee (\sim p \wedge q)$	$p \wedge (\sim p \vee q)$
T	T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	F	T	T	T	F
F	F	T	F	F	T	F	F	F

ستون‌های مربوط به $p \vee (\sim p \wedge q)$ و $p \vee q$ با هم برابر شده‌اند. پس: $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$
ستون‌های مربوط به $p \wedge (\sim p \vee q)$ و $p \wedge q$ با هم برابر شده‌اند. پس: $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

۳) اثبات قانون دمورگان: ابتدا ارزش گزاره‌های p و q را می‌نویسیم و سپس ارزش گزاره‌هایی که مورد نیاز است را در جدول به دست می‌آوریم:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T	F	F	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T	F	T	F
F	T	T	F	F	T	T	F	T	F
F	F	T	T	F	F	T	T	T	T

ستون‌های مربوط به $\sim (p \wedge q)$ و $\sim p \vee \sim q$ با هم برابر شده‌اند. پس: $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
ستون‌های مربوط به $\sim (p \vee q)$ و $\sim p \wedge \sim q$ با هم برابر شده‌اند. پس: $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

مثال: نشان دهید گزاره $[\sim p \wedge (\sim q \wedge r)] \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$ هم‌ارز گزاره r است.

پاسخ: با استفاده از قوانین جبر گزاره‌ها داریم:

$$[\sim p \wedge (\sim q \wedge r)] \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r) \equiv [(\sim p \wedge \sim q) \wedge r] \vee [(q \vee p) \wedge r]$$

پخشی

شرکت‌پذیری

$$\equiv [\sim (p \vee q) \wedge r] \vee [(q \vee p) \wedge r]$$

دمورگان

$$\equiv [\sim (p \vee q) \vee (q \vee p)] \wedge r \equiv T \wedge r \equiv r$$

پخشی

ب) اگر ارزش گزاره درست را با T و ارزش گزاره نادرست را با F نمایش دهیم، هم‌ارزی‌های زیر که تقریباً بدیهی هستند را نیز به خاطر بسپارید.

$$1) \begin{cases} p \wedge p \equiv p \\ p \vee p \equiv p \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} p \wedge F \equiv F \\ p \vee F \equiv p \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} p \wedge T \equiv p \\ p \vee T \equiv T \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} p \wedge \sim p \equiv F \\ p \vee \sim p \equiv T \end{cases}$$

مثال: با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید ترکیب عطفی یک گزاره با نقیضش همواره نادرست و ترکیب فصلی یک گزاره با نقیضش همواره درست است.

پاسخ: گزاره دلخواه p را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهیم: $p \wedge \sim p \equiv F$ و $p \vee \sim p \equiv T$

p	~p	$p \wedge \sim p$	$p \vee \sim p$
T	F	F	T
F	T	F	T

در ستون $p \wedge \sim p$ همه حالت‌ها F هستند، پس $p \wedge \sim p \equiv F$. در ستون $p \vee \sim p$ همه حالت‌ها T هستند، پس: $p \vee \sim p \equiv T$

تذکره ۱) اگر همه حالت‌های مربوط به یک گزاره درست باشد، به آن گزاره همیشه درست می‌گوییم.

تذکره ۲) اگر همه حالت‌های مربوط به یک گزاره نادرست باشد، به آن گزاره همیشه نادرست می‌گوییم.

ترکیب شرطی گزاره‌ها

گزاره «اگر هوا بارانی باشد، آن‌گاه آسمان ابری است.» را در نظر بگیرید. گزاره‌هایی به این شکل را «گزاره‌های شرطی» می‌گوییم. در حالت کلی اگر p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب «اگر p آن‌گاه q» را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم و آن را به صورت « $p \Rightarrow q$ » می‌نویسیم. این گزاره را به صورت «p شرط کافی برای q است.» یا «q شرط لازم برای p است.» نیز می‌خوانیم. در این ترکیب شرطی گزاره p را «فرض یا مقدم» و q را «حکم یا تالی» می‌گوییم.

مثال: گزاره شرطی روبرو را در نظر بگیرید:
 $p \Rightarrow q$: «آسمان ابری است» \Rightarrow «هوا بارانی است»
 فرض یا مقدم حکم یا تالی

گزاره شرطی بالا تنها زمانی نادرست است که «هوا بارانی باشد» اما «آسمان ابری نباشد».

مثال: گزاره شرطی «اگر حسن خوب درس بخواند، آن‌گاه نمره خوبی می‌گیرد.» را در نظر بگیرید.

این گزاره شرطی نیز تنها زمانی نادرست است که حسن خوب درس بخواند اما نمره خوبی نگیرد.

نتیجه: گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ تنها زمانی نادرست است که p درست اما q نادرست باشد.

جدول ارزش گزاره مرکب $p \Rightarrow q$ به صورت مقابل است.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

همان‌طور که در جدول ارزش $p \Rightarrow q$ می‌بینید، اگر ارزش p (مقدم) نادرست باشد، بدون توجه به این‌که

q (تالی) درست یا نادرست است، ارزش $p \Rightarrow q$ همواره درست است. در این حالت می‌گویند ارزش گزاره

شرطی « $p \Rightarrow q$ » به انتفای مقدم درست است.

مثال: ارزش گزاره «اگر ۴ عددی فرد باشد، آن‌گاه ۹ مربع کامل نیست.» با توجه به این‌که مقدم یعنی گزاره «۴ عددی فرد است.» نادرست است، به انتفای مقدم درست می‌باشد.

مثال: اگر گزاره‌های درست و q گزاره‌های نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

$$1) (r \Rightarrow p) \Rightarrow q \quad 2) \sim p \vee (q \wedge (r \vee q)) \quad 3) p \vee (\sim p \wedge (\sim p \vee q)) \quad 4) \sim p \wedge (q \vee r) \wedge r$$

پاسخ: ارزش گزاره‌های p و q مشخص است. آن‌ها را می‌نویسیم و حالت‌های مختلف را برای r در نظر می‌گیریم:

$$1) \sim p \wedge (q \vee r) \wedge r \equiv \sim T \wedge (F \vee T) \wedge T \equiv F \wedge T \wedge T \equiv F \wedge T \equiv F$$

ارزش گزاره r تأثیری در جواب ندارد.

$$2) p \vee (\sim p \wedge (\sim p \vee q)) \equiv T \vee (\sim T \wedge (\sim T \vee F)) \equiv T \vee (F \wedge (F \vee F)) \equiv T \vee (F \wedge F) \equiv T \vee F \equiv T$$

حواستان باشد در $T \vee (\sim T \wedge (\sim T \vee F))$ هم می‌توانستیم بگوییم ارزش گزاره برابر T است، چون داریم:

$$T \vee \square \equiv T$$

$$3) \sim p \vee (q \wedge (r \vee q)) \equiv \sim T \vee (F \wedge (T \vee F)) \equiv F \vee (F \wedge T) \equiv F \vee F \equiv F$$

$$4) (r \Rightarrow p) \Rightarrow q \equiv (T \Rightarrow F) \Rightarrow F$$

$$5) (r \Rightarrow T) \Rightarrow F \equiv (T \Rightarrow T) \Rightarrow F \equiv T \Rightarrow F \equiv F$$

دو حالت داریم:

$$6) (r \Rightarrow T) \Rightarrow F \equiv (F \Rightarrow T) \Rightarrow F \equiv T \Rightarrow F \equiv F$$

پس ارزش r تأثیری در جواب ندارد و ارزش این گزاره نادرست است.

عکس گزاره شرطی

گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ » را عکس گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ » می‌گوییم.

ارزش این دو گزاره ربطی به هم ندارند و هر کدام می‌توانند درست یا نادرست باشند.

مثال: عکس گزاره شرطی « $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0$ » گزاره شرطی « $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0$ » است.

ارزش گزاره شرطی « $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0$ » درست است اما ارزش گزاره شرطی « $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0$ » نادرست است؛ زیرا مثال نقض دارد. مثلاً اگر $x = -2$ باشد، $x^2 - 4 = (-2)^2 - 4 = 0$ است، اما $x - 2 = (-2) - 2 = -4 \neq 0$ می‌باشد.

عکس نقیض گزاره شرطی

گزاره « $p \Rightarrow q$ » را عکس نقیض گزاره « $p \Rightarrow q$ » می‌گوییم. هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود، هم‌ارز است. $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ قانون عکس نقیض

مثال: عکس نقیض گزاره‌های شرطی زیر را بنویسید.

(۱) اگر در کوهستان باران ببارد، آن‌گاه در آن گیاه می‌روید. $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$ (۲)

پاسخ: (۱) برای نوشتن عکس نقیض یک گزاره شرطی باید جای فرض و حکم را عوض کرده و هر دو را نقیض کنیم. عکس نقیض گزاره (۱) به شکل زیر است:

(در کوهستان باران می‌بارد) $\Rightarrow \sim$ (اگر در کوهستان گیاه برآید) $\equiv \sim$ (در کوهستان گیاه می‌روید) \Rightarrow (اگر در کوهستان باران ببارد)

در کوهستان باران نیاریده است \Rightarrow اگر در کوهستان گیاه نرویده باشد \equiv

*عکس نقیض ۱: اگر در کوهستان گیاه نروید، آن‌گاه در کوهستان باران نیاریده است.

(۲) $(x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2) \equiv (\sim(x > 2 \vee x < -2) \Rightarrow \sim(x^2 > 4)) \equiv (x \leq 2 \wedge x \geq -2 \Rightarrow x^2 \leq 4) \equiv (-2 \leq x \leq 2 \Rightarrow x^2 \leq 4)$

عبارت آخر عکس نقیض عبارت اولیه است و با آن هم‌ارز است.

اثبات با عکس نقیض: می‌توانیم به جای اثبات مستقیم یک قضیه، از اثبات عکس نقیض استفاده کنیم. برای این کار نقیض فرض و نقیض حکم را نوشته و با استفاده از نقیض حکم، نقیض فرض را اثبات می‌کنیم.

مثال: ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و n^2 مضرب ۲ باشد، آن‌گاه n مضرب ۲ است.

پاسخ: به جای اثبات حکم مسئله، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم:

(n^2 مضرب ۲ نیست. $\Rightarrow n$ مضرب ۲ نباشد.) \equiv (n مضرب ۲ است. $\Rightarrow n^2$ مضرب ۲ است.)

n مضرب ۲ نباشد. $\Rightarrow n = 2k \pm 1 \Rightarrow n^2 = 4k^2 \pm 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 \pm 2k}_{k'}) + 1 = 2k' + 1$

بنابراین n^2 مضرب ۲ نیست. پس عبارت عکس نقیض اثبات شد.

تبدیل ترکیب شرطی به ترکیب فصلی

برای تبدیل گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ » به ترکیب فصلی می‌توان آن را به صورت « $p \vee \sim q$ » نوشت:

$p \Rightarrow q \equiv p \vee \sim q$

مثال: هم‌ارزی‌های مقابل را با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها ثابت کنید.

$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

p	q	~p	~q	p ⇒ q	~p ∨ q	~q ⇒ ~p
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

چون ستون‌های مربوط به گزاره‌های « $p \Rightarrow q$ »، « $\sim p \vee q$ » و « $\sim q \Rightarrow \sim p$ » هر سه یکسان هستند، پس این سه گزاره هم‌ارزند.

مثال: هم‌ارزی‌های زیر را بدون استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها اثبات کنید.

(الف) $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

(ب) $(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv p$

$\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$

پاسخ: (الف) با استفاده از قوانین جبر گزاره‌ها داریم.

تبدیل شرطی به فصلی

تبدیل شرطی به فصلی

پخشی

با استفاده از قوانین جبر گزاره‌ها داریم:

$(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv (\sim(\sim p) \vee \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv (p \vee \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv p \vee (\sim q \wedge q) \equiv p \vee F \equiv p$

بررسی هم‌ارزی‌ها با کمک استدلال: گاهی اوقات می‌توانیم با کمک استدلال، خیلی سریع‌تر هم‌ارزی‌ها را بررسی کنیم. به عنوان مثال هم‌ارزی $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$ را در نظر بگیرید. برای این که نشان دهیم $p \Rightarrow p \vee q$ همواره درست است دوتا راه داریم. یکی این که از جدول ارزش گزاره‌ها استفاده کنیم (در سؤالات امتحانی دادیم). راه دیگر استفاده از استدلال است. می‌دانیم گزاره p دو حالت دارد. اگر p نادرست باشد، آن‌گاه گزاره شرطی $p \Rightarrow p \vee q$ به انتفای مقدم درست است. اگر p درست باشد، گزاره $p \vee q$ هم درست می‌شود و چون هم مقدم و هم تالی درست هستند، گزاره شرطی $p \Rightarrow p \vee q$ درست است. بنابراین گزاره $p \Rightarrow p \vee q \equiv T$ است.

مثال: با کمک استدلال نشان دهید: $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$

پاسخ: اگر ارزش گزاره $p \wedge q$ نادرست باشد، آن‌گاه گزاره $p \wedge q \Rightarrow p$ به انتفای مقدم درست است. اگر ارزش گزاره $p \wedge q$ درست باشد، یعنی هم p و هم q درست بوده، پس هم مقدم و هم تالی درست هستند و $p \wedge q \Rightarrow p$ درست است. بنابراین گزاره $p \wedge q \Rightarrow p \equiv T$ است.

ترکیب دوشروطی

ترکیب دوشروطی دو گزاره p و q را با نماد « \Leftrightarrow » نمایش می‌دهیم و به صورت $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ تعریف می‌کنیم و آن را به شکل‌های زیر می‌خوانیم:

- ۱) «اگر p آن‌گاه q و برعکس»
- ۲) « p شرط لازم و کافی برای q است.»
- ۳) « p اگر و تنها اگر q »

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

جدول ارزش گزاره‌ها برای $p \Leftrightarrow q$ به صورت مقابل است:
 با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها ارزش $p \Leftrightarrow q$ زمانی درست است که p و q هم‌ارزش باشند یعنی p و q هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.
 در واقع $p \Leftrightarrow q$ زمانی درست است که هم $p \Rightarrow q$ و هم $q \Rightarrow p$ درست باشند.

مثال: گزاره‌های زیر را به صورت شرطی بنویسید و در صورت امکان آن‌ها را به صورت شرط لازم و کافی بیان کنید.

$$\left. \begin{aligned} a = b &: p \\ a^2 = b^2 &: q \end{aligned} \right\} (1)$$

پاسخ: عبارت شرطی « $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ » درست است؛ اما عکس آن یعنی « $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$ » نادرست است؛ زیرا $1^2 = (-1)^2$ است، اما $1 \neq -1$ نیست، پس عبارت داده‌شده دوشروطی نیست و ترکیب شرطی داده‌شده را به صورت‌های زیر می‌توانیم بخوانیم:

۱) « $a^2 = b^2$ شرط لازم برای $a = b$ است.» $\Leftrightarrow (a = b \Rightarrow a^2 = b^2)$
 ۲) «اگر $ab = 0$ باشد، a یا b یا هر دوی آن‌ها صفر هستند و برعکس اگر a یا b یا هر دوی آن‌ها صفر باشند، حتماً $ab = 0$ خواهد بود، پس این گزاره‌ها با هم یک ترکیب دوشروطی درست می‌سازند، پس داریم: $(p \Leftrightarrow q) \equiv (ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0)$ »

این ترکیب دوشروطی را به صورت‌های زیر می‌خوانیم:

۱) شرط لازم و کافی برای آن که $ab = 0$ باشد، این است که $a = 0$ یا $b = 0$ باشد.
 ۲) « $ab = 0$ است، اگر و تنها اگر $a = 0$ یا $b = 0$ باشد.» اگر $ab = 0$ باشد، $a = 0$ یا $b = 0$ است و برعکس.

مثال: با رسم جدول ارزش گزاره‌ها، درستی یا نادرستی هم‌ارزی مقابل را بررسی کنید.

پاسخ: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \vee p) \equiv q$

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	F	T	F	F

ستون‌های مربوط به $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ و q با هم برابر هستند؛ پس: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \vee p) \equiv q$

نقیض گزاره‌های شرطی و دوشرطی

نقیض گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت زیر به دست می‌آید: (نوشتن ترکیب شرطی به صورت فصلی)
 $\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q)$
 $\equiv \sim(\sim p) \wedge \sim q$ (دمورگان)
 $\equiv p \wedge \sim q$ ($\sim(\sim p) \equiv p$)

نتیجه: نقیض گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ » به صورت « $p \wedge \sim q$ » است:

نقیض گزاره دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:
 (دمورگان) $\equiv \sim(p \Rightarrow q) \vee \sim(q \Rightarrow p)$
 (توزیع پذیری) $\equiv [(p \wedge \sim q) \vee q] \wedge [(p \wedge \sim q) \vee \sim p]$
 (تبدیل فصلی به شرطی) $\equiv (\sim p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \sim p)$
 (تعریف دوشرطی) $\equiv \sim p \Leftrightarrow q$
 (تعریف) $\equiv \sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim(p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p)$
 (نقیض گزاره شرطی) $\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
 (شبه جذب) $\equiv [p \vee q] \wedge [\sim q \vee \sim p]$

نتیجه: نقیض گزاره دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ را به یکی از صورت‌های زیر می‌توان نوشت:
 $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (\sim p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Leftrightarrow \sim q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

سؤال‌های امتحانی

۳۴- قوانین جابه‌جایی و جذب را به وسیله جدول ارزش گزاره‌ها ثابت کنید.

۳۵- با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها، هم‌ارزی‌های زیر را ثابت کنید:

الف) $\sim(p \vee \sim q) \equiv \sim p \wedge q$

ب) $(p \wedge q) \vee (p \wedge (\sim q)) \equiv p$

۳۶- مقادیر x, y, z را بیابید به طوری که داشته باشیم:

الف) $(2y + z)^2 + (x - y)^2 + \sqrt{2x + 6} = 0$

ب) $(2y + x)(x + 1)(y - 1) = 0$

۳۷- هم‌ارزی‌های مقابل را به وسیله جدول ارزش گزاره‌ها اثبات کنید.

الف) $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$

ب) $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$

□ نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

۳۸- $x \geq -6 \vee x < 5$

۳۹- عددی فرد است یا $\sqrt{2}$ گویاست.

۴۰- لوزی متوازی‌الاضلاع است و قطرهایش همدیگر را نصف می‌کنند. $(p \vee q) \wedge \sim p$ - ۴۱

۴۲- اگر دو عدد حقیقی با هم برابر باشند، آن‌گاه مجذور آن دو عدد مساوی هستند.

۴۳- عکس نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) $x \geq 2 \Rightarrow x^2 > 4$

ب) اگر حسن در تمرینات شرکت کند، برای تیم فوتبال مدرسه انتخاب می‌شود.

۴۴- با توجه به گزاره شرطی «اگر عددی مثبت نباشد، آن‌گاه منفی یا صفر است.» موارد زیر را پاسخ دهید.

الف) عکس گزاره ب) نقیض گزاره پ) عکس نقیض گزاره

۴۵- وقتی می‌گوییم «ارزش یک گزاره شرطی به انتفای مقدم درست است» به چه معنی است؟

۴۶- با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها، هم‌ارزی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $p \Rightarrow p \equiv T$

ب) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$ (کتاب درسی)

۴۷- با استفاده از عکس نقیض یک گزاره برای هر عدد صحیح a ثابت کنید اگر a^2 عددی فرد باشد، آن‌گاه a نیز عددی فرد است. (کتاب درسی)

۴۸- با استفاده از عکس نقیض یک گزاره برای هر عدد صحیح a ثابت کنید اگر a^2 مضرب ۳ باشد، a نیز مضرب ۳ است.

۴۹- الف) آیا از این که $p \wedge q \equiv p \wedge r$ می‌توان نتیجه گرفت $q \equiv r$ ؟ ب) آیا از این که $p \vee q \equiv p \vee r$ می‌توان نتیجه گرفت $q \equiv r$ ؟

پ) آیا از این که $p \Rightarrow r$ درست و $q \Rightarrow r$ نادرست هستند، می‌توان نتیجه گرفت $(p \vee q) \Rightarrow r$ نادرست است؟

۵۰- x را چنان تعیین کنید که هم‌ارزی روبه‌رو همواره برقرار باشد: $(x \wedge \sim p) \vee (\sim x \wedge p) \vee (x \wedge p) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee q \vee x)$

□ بدون استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها و با استفاده از قوانین جبر گزاره‌ها، هم‌ارزی‌های زیر را ثابت کنید.

۵۱- $p \wedge (q \Rightarrow \sim r) \Rightarrow p \equiv T$ ۵۲- $\sim p \Rightarrow [q \Rightarrow (p \Rightarrow r)] \equiv T$ ۵۳- $[p \Rightarrow (r \Rightarrow \sim p)] \wedge (r \wedge p) \equiv F$

۵۴- $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)] \Rightarrow p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ ۵۵- $\sim p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow r) \equiv p \vee q \vee r$ ۵۶- $(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow p \wedge r \equiv p \wedge (q \vee r)$

۵۷- $(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$

۵۸- نشان دهید گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow p \Rightarrow q$ هم‌ارز گزاره q است.

۵۹- ارزش p و q را به گونه‌ای مشخص کنید که ارزش گزاره $((\sim p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)) \Rightarrow p$ نادرست باشد.

۶۰- با توجه به گزاره‌های زیر، ارزش گزاره‌های $\sim p \Rightarrow (p \wedge r)$ و $(p \vee q) \Rightarrow \sim p$ را مشخص کنید.

p : صفر عددی زوج است. q : عدد ۲ بر ۶ بخش پذیر است. r : عدد ۱ اول نیست.

۶۱- ارزش گزارهٔ مقابل را به دست آورید.

$$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$$

۶۲- با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها، هم‌ارزی زیر را ثابت کنید.

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q \quad (\text{کتاب درسی})$$

ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

۶۳- شرط لازم و کافی برای این که دو ضلع مثلثی با هم برابر باشند، این است که دو زاویهٔ مجاور اضلاع با هم برابر باشند.

(کتاب درسی)

۶۴- شرط لازم و کافی برای این که احتمال پیشامدی صفر باشد، این است که پیشامد تهی باشد.

(کتاب درسی)

۶۵- شرط لازم و کافی برای این که نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، این است که فاصلهٔ نقطه از دو سر پاره‌خط یکی باشد.

$$a \times b = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge b = 0 \quad ۶۶ \quad x > 3 \Leftrightarrow 20 - 6x < 2 - 67 \quad ۶۷$$

۶۸- در هر یک از موارد زیر به جای \square چه تعداد از علامت‌های « \vee » یا « \wedge » یا « \Rightarrow » یا « \Leftrightarrow » را می‌توان قرار داد تا یک هم‌ارزی درست داشته باشیم؟ (T درست و F نادرست است).

$$\text{الف) } \left(\frac{2}{5} \neq \frac{1}{3}\right) \square (1 \in \{2, 3, 4\}) \equiv T \quad \text{ب) } (-2 > 3) \square (x^2 + 1 \neq 0) \equiv T$$

$$\text{پ) } (a \in \{b\} \Leftrightarrow a = b) \square (\text{دو قطر متوازی‌الاضلاع با هم برابرند}) \equiv F$$

۶۹- جدول ارزش گزاره‌های زیر را کامل کنید.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim p \Rightarrow q$	$\sim p \Leftrightarrow q$
	مجموع هر ۲ عدد اول بزرگ‌تر از ۲ همواره زوج است.								F
$ab < 0 \Rightarrow a > 0 \vee b > 0$				F					
-۷ عددی اول است					T				
	$(a + b) \Leftrightarrow (a) \wedge (b)$ زوج فرد فرد							F	

۷۰- نقیض گزاره‌های شرطی زیر را بنویسید.

الف) اگر p عددی اول باشد، $p = 6k \pm 1$ است.

ب) اگر عددی بر ۶ بخش پذیر باشد، آن‌گاه بر ۳ و بر ۲ بخش پذیر است.

۷۱- گزاره‌های زیر را به صورت یک ترکیب شرطی یا دوشروطی درست بنویسید و آن‌ها را به صورت شرط لازم و کافی بیان کنید.

$$\left. \begin{array}{l} \text{الف) } \left\{ \begin{array}{l} p: \text{ چهارضلعی } ABCD \text{ مستطیل است.} \\ q: \text{ زوایای } \hat{A}BC \text{ و } \hat{C}DA \text{ قائمه‌اند.} \end{array} \right\} \text{ ب) } \left\{ \begin{array}{l} p: a \times b: \text{ زوج است.} \\ q: a + 1: \text{زوج است.} \end{array} \right\} \text{ پ) } \left\{ \begin{array}{l} p: a: \text{زوج است.} \\ q: a + 1: \text{فرد است.} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ت) } \left\{ \begin{array}{l} p: a \text{ و } b \text{ گنگ و مثبت هستند.} \\ q: ab: \text{گنگ است.} \end{array} \right\} \text{ ث) } \left\{ \begin{array}{l} p: ABCD: \text{مربع است.} \\ q: \text{دو قطر } ABCD \text{ عمود و برابرند.} \end{array} \right\}$$

۷۲- جدول ارزش گزاره‌های زیر را با توجه به اطلاعات داده‌شده تکمیل کنید. (اطلاعات هر سطر فقط مربوط به همان سطر است).

p	q	r	$(p \wedge r) \Rightarrow q$	$\sim p \wedge ((\sim p \vee \sim r) \Leftrightarrow q)$	$(p \vee q) \Rightarrow \sim r$	$[r \wedge (p \vee q)] \Rightarrow q$
	F		T			
		F		T		
				F		F

۷۳- با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید:

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$$

۷۴- اگر ارزش گزارهٔ $[\sim q \Leftrightarrow (p \wedge s)] \wedge [\sim (q \Rightarrow (p \Rightarrow r))]$ درست باشد، ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

$$\text{الف) } S \Leftrightarrow (p \wedge \sim r) \quad \text{ب) } [\sim q \Rightarrow (p \Leftrightarrow \sim q)] \Rightarrow r$$

۷۵- اگر بدانیم ارزش گزارهٔ $\sim q \Rightarrow \sim p$ نادرست است، ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

$$\text{الف) } (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim p \quad \text{ب) } (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow (q \vee p))$$

۷۶- اگر ارزش گزارهٔ $\sim p \Rightarrow (q \vee r)$ نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزارهٔ $(p \wedge (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (q \vee \sim r)$ را تعیین کنید.

۷۷- بدون استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها و با استفاده از قوانین جبر گزاره‌ها، هم‌ارزی زیر را ثابت کنید.

$$p \Leftrightarrow q \equiv \sim p \Leftrightarrow \sim q$$

ردیف	آزمون جمع‌بندی فصل اول	رشته ریاضی پایه یازدهم	مدت امتحان: ۶۰ دقیقه	Kheilisabz.com	نمره
۱	جاهای خالی را پر کنید. الف) ترکیب دوشرطی زمانی درست است که ب) تعداد زیرمجموعه‌های سره مجموعه $A = \{1, 3, 5, 7\}$ برابر است. پ) از $X \subseteq A'$ و $X \subseteq A$ نتیجه می‌شود ت) اگر A دارای m عضو و B دارای n عضو باشد، حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ دارای زیرمجموعه است.				۱
۲	درستی یا نادرستی هر یک از عبارات‌های زیر را مشخص کنید. الف) مجموعه‌جواب گزاره‌نما، همان دامنه تغییر است. ب) به گزاره $(p \Rightarrow q) \sim (p \Rightarrow q)$ عکس نقیض $p \Rightarrow q$ می‌گویند. پ) برای تمام اعداد حقیقی x ، حاصل ضرب $\tan x$ در $\cot x$ برابر یک می‌باشد. ت) اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشند، آن‌گاه $A \times B = B \times A$ است.				۱
۳	ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) $4 > 5 \Leftrightarrow -4 < -5$ ب) $(x^2 + 2 = 0) \wedge (9 > 8)$ پ) اگر ۱۱ اول نباشد، $\sqrt{36}$ مرکب است. ت) $\exists x \in \mathbb{Z}, 2x^2 + 3x + 1 = 0$				۱
۴	نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید. الف) ۲ عددی فرد است یا π گویاست. ب) اگر a زوج باشد، آن‌گاه $a + 1$ فرد است. پ) $a \in \{b, c, d\}$ (ت) (P) مجموعه اعداد اول است. $\forall n \in \mathbb{N}; 2^n + 1 \in P$				۱
۵	اگر گزاره‌های $(s \vee \sim q)$ و $(\sim p \Rightarrow \sim s)$ و $(q \wedge m)$ و $(r \Rightarrow \sim p)$ درست باشد، ارزش گزاره $r \sim$ چیست؟				۱
۶	با استفاده از قوانین جبر گزاره‌ها، هم‌ارزی‌های زیر را ثابت کنید. الف) $\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p$ ب) $[\sim q \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow \sim p \equiv T$				۲
۷	درستی هم‌ارزی‌های زیر را با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید. $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)] \Leftrightarrow \sim p$				۱/۵
۸	اگر گزاره $p \Rightarrow q$ نادرست باشد و r گزاره دلخواهی باشد، چند مورد از گزاره‌های زیر همواره نادرست است؟ چرا؟ الف) $(p \vee \sim q) \vee r$ ب) $(\sim q \Rightarrow \sim p) \Rightarrow r$ پ) $(p \wedge \sim q) \vee r$ ث) $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim(p \vee q)$ ت) $p \Rightarrow (q \wedge r)$				۲/۵
۹	ارزش گزاره‌های سوری زیر را مشخص کرده و سپس نقیض آن‌ها را بنویسید. الف) $\exists x \in \mathbb{R}; (x \geq 2)$ ب) $(\forall x \in \mathbb{Z}; \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}) \vee (\exists x \in \mathbb{R}; \sin^2 x + \cos^2 x = 1)$				۱
۱۰	اگر مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ باشد، الف) مجموعه توانی A را بنویسید. ب) مجموعه $P(P(A))$ چند عضو دارد؟				۱
۱۱	اگر به تعداد اعضای یک مجموعه ۴ عضو اضافه کنیم، به تعداد زیرمجموعه‌های آن 120 واحد اضافه می‌شود. این مجموعه چند زیرمجموعه تک‌عضوی دارد؟				۱
۱۲	اگر n عدد طبیعی و A_n بازه $(-1)^n n, 2n)$ باشد، چند عدد صحیح به مجموعه $\bigcup_{n=1}^4 A_n$ تعلق دارد؟				۱
۱۳	آیا دو مجموعه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = x\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 2\}$ مساوی هستند؟ چرا؟				۱
۱۴	به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: الف) $(A \cap B) \cup (A - B) = A$ ب) $(A - B) \cup (A \cap B') \cap [(B - A) \cup A'] = \emptyset$ پ) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$ ت) $(A \cap B) - (B \cap C) = (A - B') - C$				۲/۵
۱۵	در هر قسمت با توجه به مجموعه‌های A و B ، مجموعه خواسته‌شده را مشخص کرده و سپس آن را رسم کنید. الف) $A = \mathbb{N}, B = [1, 4] \Rightarrow A \times B = ?$ ب) $A = \{2, 3\}, B = \{3, 4, 5\} \Rightarrow B \times A = ?$ پ) $A = [0, 3], B = [1, 3] \Rightarrow A^2 - A \times B = ?$				۱/۵
۲۰	جمع نمرات				

$$\frac{6x+1}{2x-5} = \frac{(6x-15)+16}{2x-5} = \frac{3(2x-5)+16}{2x-5} = 3 + \frac{16}{2x-5} \in \mathbb{Z}$$

پس $2x-5$ مقسوم‌علیه عدد ۱۶ باید باشد:

$$2x-5 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16\}$$

$$\Rightarrow 2x \in \{-11, -3, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 13, 21\}$$

$$\Rightarrow x \in \left\{ \frac{-11}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, 3, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2}, \frac{21}{2} \right\}$$

$$\xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \{2, 3\} \Rightarrow S = \{2, 3\}$$

-۲۴

$$a \text{ مربع کامل است} \Rightarrow a = k^2, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow S = \{k^2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{\dots, (-3)^2, (-2)^2, (-1)^2, 0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$$

$$= \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$$

$$\text{فرد } a = 2k+1 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} S = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$$

-۲۵

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow (2x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

-۲۶

$$\text{یا } x = -1 \xrightarrow{D=\mathbb{R}} S = \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$$

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow (2x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

-۲۷

$$\text{یا } x = -1 \Rightarrow S = \{-1\}$$

با توجه به این که دامنه متغیر گزاره نما مجموعه اعداد صحیح است جزء مجموعه جواب نمی‌باشد.

$$3^x = 0 \text{ هیچ مقدار حقیقی برای } x \text{ نمی‌توانیم پیدا کنیم که } 3^x = 0$$

شود، بنابراین مجموعه جواب تهی است. ($S = \emptyset$)

$$\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^3} \Rightarrow \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \leq 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x^3} \leq 0 \Rightarrow 0 < x \leq 1$$

-۲۹

بنابراین مجموعه جواب $S = (0, 1]$ می‌باشد.

$$A = \{n - n^3 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1 - 1^3, 2 - 2^3, 3 - 3^3, \dots\}$$

-۳۰

$$= \{0, -6, -24, \dots\}$$

$$\sqrt{x+2} = -x \xrightarrow{-2 \leq x \leq 0} x+2 = x^2$$

-۳۱

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1, +2 \Rightarrow S = \{-1\}$$

$x = +2$ در گزاره نما صدق نمی‌کند.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ اگر } A \text{ مجموعه‌ای ۳ عضوی باشد،}$$

-۳۲

خواهد بود، پس مجموعه جواب این گزاره نما شامل زیرمجموعه‌های

۳ عضوی A است که تعداد آن‌ها برابر است با $\binom{6}{3} = 20$ زیرمجموعه.

-۳۳ الف) وقتی $a+b$ زوج است که a و b هر دو فرد یا a و b هر دو زوج باشند.

$$\left(\begin{matrix} \text{زوج } a \\ \text{زوج } b \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} \text{فرد } a \\ \text{فرد } b \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} \text{حالت } 3 \\ \text{حالت } 3 \end{matrix} \right) \times \left(\begin{matrix} \text{حالت } 3 \\ \text{حالت } 3 \end{matrix} \right) = 18$$

بنابراین مجموعه جواب این گزاره نما ۱۸ زوج مرتب را شامل می‌شود.

ب) (a, b) کلاً ۳۶ حالت دارد که در ۶ تایی آن‌ها a و b مساوی‌اند.

در ۳۰ تایی بقیه در نیمی از حالت‌ها $a < b$ است، پس مجموعه جواب

$$\text{این گزاره نما شامل } 15 = \frac{36-6}{2} \text{ زوج مرتب است.}$$

۲-۱ صفر

۲-۱

-۲ -۴

۱۱ -۳

< -۶

> -۵

۷- ارزش گزاره نادرست است. مثلاً $2+5=7$ عددی فرد است.

۸- ارزش گزاره درست است.

۹- ارزش گزاره نادرست است.

نکته

باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۳ با باقی‌مانده مجموع ارقامش در تقسیم بر عدد ۳ برابر است. پس اگر مجموع ارقام عددی بر ۳ بخش‌پذیر باشد آن عدد بر ۳ بخش‌پذیر است، بنابراین با توجه به این که مجموع ارقام عدد 2635921431 عدد ۳۶ است. پس این عدد بر ۳ بخش‌پذیر است و نمی‌تواند یک عدد اول باشد، پس مرکب است و گزاره داده‌شده نادرست است.

۱۰- ارزش گزاره درست است.

۱۱- ارزش گزاره نادرست است.

۱۲- ارزش گزاره نادرست است، زیرا عبارت $5^9 + 8$ به صورت زیر به ضرب ۲ عدد بزرگ‌تر از یک تجزیه می‌شود:

$$5^9 + 8 = (5^3)^3 + 2^3 = 125^3 + 2^3$$

$$= (125^3 + 2)(125^2 - 125 \times 2 + 2^2)$$

۱۳- ارزش گزاره نادرست است. به ازای $n=5$ داریم $n^5 + 1 = 32 + 1 = 33$

که اول نیست.

۱۴- $8 > 10$ - ارزش نادرست

۱۵- عددی اول نیست. - ارزش نادرست

۱۶- $a \notin \{a, b, c\}$ - ارزش نادرست

۱۷- سعدی شاعر است. - ارزش درست

۱۸- مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی 360° یا بیشتر است. -

ارزش نادرست

۱۹- از جدول ارزش گزاره استفاده می‌کنیم:

p	~ p	~ (~ p)
د	ن	د
ن	د	ن

ستون مربوط به p و $(\sim p)$ برابر شدند. پس این دو گزاره هم‌ارز هستند.

-۲۰

$S = \{vk \mid k \in \mathbb{Z}\}$ مجموعه جواب $x = vk \Rightarrow x$ مضرب ۷ است.

$$= \{\dots, -21, -14, -7, 0, 7, 14, 21, \dots\}$$

۲۱- $x = 7k + 3 \Rightarrow x$ واحد از مضارب ۷ بیشتر است.

$$\Rightarrow S = \{7k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{\dots, -18, -11, -4, 3, 10, 17, 24, \dots\}$$

۲۲- عبارت $\frac{1}{2+x}$ باید عدد طبیعی باشد، پس $2+x$ باید مقسوم‌علیه

$$\text{عدد یک باشد: } x = -1 \Rightarrow 2+x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2+x} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{2+x} \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow S = \{-1\}$$

ب) جدول ارزش گزاره‌ها را رسم می‌کنیم:

p	q	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \wedge \sim q$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$
T	T	F	T	F	T
T	F	T	F	T	T
F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F

ارزش ستون آخر با ستون p برابر است، پس $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \equiv p$
 ۳۶- الف) هر سه عبارت $(2y+z)^2$ ، $(x-y)^2$ و $\sqrt{2x+6}$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر هستند، پس وقتی مجموع آن‌ها برابر صفر است که هر ۳ برابر صفر باشند.

$$\begin{aligned} & (2y+z)^2 + (x-y)^2 + \sqrt{2x+6} = 0 \\ \Rightarrow & (2y+z=0) \wedge (x-y=0) \wedge (\sqrt{2x+6}=0) \\ \Rightarrow & \begin{cases} 2y+z=0 \\ x=y \\ 2x+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+6=0 \Rightarrow x=-3 \\ x=y \Rightarrow y=-3 \\ 2y+z=0 \Rightarrow 2(-3)+z=0 \Rightarrow z=6 \end{cases} \\ \Rightarrow & (x=-3 \wedge y=-3 \wedge z=6) \end{aligned}$$

ب)
 $(2y+x)(x+1)(y-1)=0 \Rightarrow 2y+x=0 \vee x+1=0 \vee y-1=0$
 $\Rightarrow (x=-1) \vee (y=1) \vee (x=-2y)$

بنابراین اگر حداقل یکی از روابط $x=-1$ ، $x=-2y$ یا $y=1$ برقرار باشد، تساوی برقرار خواهد بود.

۳۷-

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

با توجه به این که ستون آخر در هر دو جدول بالا همواره ارزش درست دارد، پس داریم:

الف) $p \Rightarrow (p \vee q) \equiv T$

ب) $(p \wedge q) \Rightarrow p \equiv T$

۳۸- الف) نقیض $p \vee q$ به صورت $\sim(p \vee q)$ یا $\sim p \wedge \sim q$ می‌باشد، پس داریم:

$$\sim(x \geq -6 \vee x < 5) \equiv \sim(x \geq -6) \wedge \sim(x < 5)$$

$$\sim(x < 5) \equiv (x < -6) \wedge (x \geq 5)$$

ب) مجموعه جواب شامل زوج‌های زیر است که تعداد آن‌ها ۱۰ تا است.
 $S = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)\}$

ت) $\Delta > 0 \rightarrow$ دو ریشه حقیقی متمایز دارد.
 $x^2 - ax + b = 0$

$$\Rightarrow a^2 - 4b > 0 \Rightarrow a^2 > 4b$$

مقادیر مختلف a و b که در رابطه بالا صدق می‌کنند، به صورت زیر هستند:

a	۱	۲	۳	۴	۵	۶
b	هیچ مقدار	هیچ مقدار	۱، ۲	۱، ۲، ۳	۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶	۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶

بنابراین مجموعه جواب این گزاره‌نما ۱۷ زوج مرتب را شامل می‌شود.
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$$A \cap B = \{3, 4, 5\}$$

$$A \cap B \subseteq X \subseteq A \cup B \Rightarrow \{3, 4, 5\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 10\}$$

۳۴- اثبات قوانین جابه‌جایی:

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \vee q$	$q \vee p$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	F	F	T	T
F	F	F	F	F	F

با توجه به این که ستون $p \wedge q$ و ستون $q \wedge p$ یکسان است، پس $p \wedge q \equiv q \wedge p$.

با توجه به این که ستون $p \vee q$ و ستون $q \vee p$ یکسان است، پس $p \vee q \equiv q \vee p$.

اثبات قوانین جذب:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \vee (p \wedge q)$	$p \wedge (p \vee q)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	F	F

با توجه به یکسان بودن ستون p و $p \vee (p \wedge q)$ این دو عبارت هم‌ارزند: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$.

با توجه به یکسان بودن ستون p و $p \wedge (p \vee q)$ این دو عبارت هم‌ارزند: $p \wedge (p \vee q) \equiv p$.

۳۵- الف) جدول ارزش گزاره‌ها را رسم می‌کنیم.

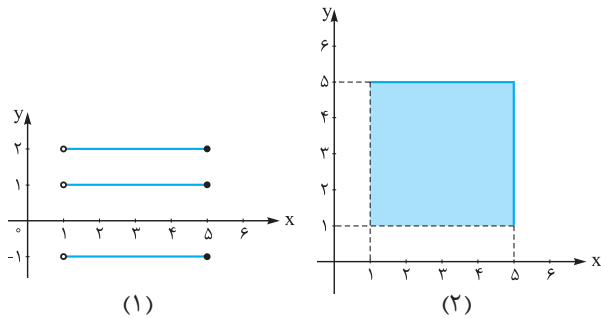
p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim(p \vee \sim q)$	$\sim p \wedge q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	F	F

دو ستون آخر با هم برابر هستند، پس $\sim(p \vee \sim q) \equiv \sim p \wedge q$

نمونه امتحان نیم‌سال اول	رشته ریاضی فیزیک	آمار و احتمال	شماره				
ردیف	امتحان شماره ①	مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه	نمره				
۱	گزاره‌نما را تعریف کنید.		۰/۵				
۲	با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها، نشان دهید:	$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$	۱				
۳	ارزش گزارهٔ سوری زیر را تعیین کرده و نقیض آن را بنویسید.	$(\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2-1}{x-1} = x+1) \vee (\exists y \in \mathbb{R}; y < 0 \wedge y^2 \leq 1)$	۱/۵				
۴	ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و a^2 عددی فرد باشد، آن‌گاه a عددی فرد است.		۱				
۵	تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعهٔ $k+1$ عضوی از تعداد اعضای مجموعهٔ شامل زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $k-1$ عضوی، 47 واحد بیشتر است. مقدار k را بیابید. (هر زیرمجموعهٔ یک مجموعه غیر از خودش را زیرمجموعهٔ محض می‌گوییم.)		۱				
۶	با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:	$(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$	۱/۵				
۷	عبارت‌های مقابل را ثابت کنید.	الف) $X \subseteq A \wedge X \subseteq A' \Rightarrow X = \emptyset$ ب) $A \subseteq B' \Rightarrow B \subseteq A'$	۱/۵				
۸	اگر $A = (1, 5]$ و $B = \{-1, 1, 2\}$ باشد، $A \times B$ و A^2 را در صفحهٔ مختصات دکارتی رسم کنید.		۱				
۹	از گزینه‌های داخل پرانتز، آن را که صحیح است انتخاب کنید: در سه بار پرتاب سکه، پیشامدهای A : هر ۳ بار سکه‌ها مشابه بیایند و B : زوج بار رو بیایند، (سازگارند / ناسازگارند) و همچنین این دو پیشامد (مستقل‌اند / وابسته‌اند).		۱/۵				
۱۰	عددی به تصادف از ۱ تا ۲۰۰ انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال این‌که عدد انتخابی نه بر ۳ بخش پذیر باشد و نه بر ۴.		۱				
۱۱	تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج ۳ برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. احتمال این‌که در پرتاب این تاس، عددی اول ظاهر شود چه قدر است؟ احتمال مشاهدهٔ اعداد ۲ یا ۳ را بیابید.		۱/۵				
۱۲	دو تاس همگن را می‌اندازیم. اگر حاصل جمع شماره‌های روشده کم‌تر از ۶ باشد، احتمال آن‌که حداقل یکی از تاس‌های روشده ۲ باشد را بیابید.		۱/۵				
۱۳	از کیسه‌ای که دو گوی سبز، سه گوی سفید و ۵ گوی آبی دارد، سه گوی را پی‌درپی و بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال این‌که گوی اول سفید و ۲ تای دیگر آبی باشد.		۱				
۱۴	از ظرف یک، ۴ مهره و از ظرف دو، ۶ مهره برداشته به ظرف سومی منتقل می‌کنیم. از ظرف سوم مهره‌ای به تصادف برمی‌داریم. مطلوب است احتمال این‌که مهرهٔ انتخاب‌شده سفید باشد.	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>۴ مهرهٔ سفید</td> <td>۵ مهرهٔ سفید</td> </tr> <tr> <td>۶ مهرهٔ سیاه</td> <td>۴ مهرهٔ سیاه</td> </tr> </table> ظرف یک ظرف دو	۴ مهرهٔ سفید	۵ مهرهٔ سفید	۶ مهرهٔ سیاه	۴ مهرهٔ سیاه	۱/۵
۴ مهرهٔ سفید	۵ مهرهٔ سفید						
۶ مهرهٔ سیاه	۴ مهرهٔ سیاه						
۱۵	۶۰ درصد واجدین شرایط شهر A و ۴۰ درصد واجدین شرایط شهر B در انتخابات شرکت کرده‌اند. اگر تعداد واجدین شرایط شهر A ، ۴ برابر واجدین شرایط شهر B باشد و فردی به تصادف از بین رأی‌دهندگان این ۲ شهر انتخاب کنیم، با چه احتمالی این شخص انتخاب‌شده از شهر A خواهد بود؟		۱/۵				
۱۶	در یک امتحان ۵ گزینه‌ای ۸ سؤال مطرح شده است. اگر یک دانش‌آموز به همهٔ سؤالات پاسخ دهد، احتمال آن را به دست آورید که: الف) تنها به سؤالات با شمارهٔ فرد پاسخ درست داده باشد. ب) به ۳ سؤال پاسخ درست داده باشد.		۱/۵				
جمع نمرات			۲۰				

پاسخ نامه تشریحی امتحان شماره (۱)

- ۸- (۱) $A \times B = \{(x, y) \mid 1 < x \leq 5 \wedge y \in \{-1, 1, 2\}\}$
 (۲) $A^T = \{(x, y) \mid 1 < x \leq 5 \wedge 1 < y \leq 5\}$



۹- اگر $P(A \cap B) = 0$ باشد، A و B ناسازگارند و اگر $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ باشد، A و B مستقل اند:

$|S| = 2 \times 2 \times 2 = 8$

$A = \{(r, r, r), (p, p, p)\} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

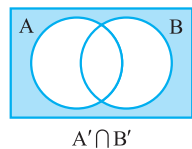
$B = \{(p, p, p), (r, r, r), (r, p, r), (p, r, r)\} = P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$A \cap B = \{(p, p, p)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow P(A \cap B) \neq 0 \Rightarrow A$ و B سازگارند.

$P(A \cap B) = \frac{1}{8} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{8}$
 $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow A$ و B مستقل اند.

۱۰- A : پیشامد این که عدد انتخابی مضرب ۳ باشد. B : پیشامد این که عدد انتخابی مضرب ۴ باشد.



$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$
 $= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

$= 1 - \left[\frac{200}{200}\right] - \left[\frac{200}{200}\right] + \left[\frac{200}{200}\right] = 1 - \frac{66}{200} - \frac{50}{200} + \frac{16}{200} = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$

۱۱- فرض مسئله: $P(2) = P(4) = P(6) = 2P(1) = 3P(3) = 3P(5)$ باشد.

$P(1) = x \Rightarrow P(1) = P(3) = P(5) = x,$

$P(2) = P(4) = P(6) = 3x$

جمع احتمالات $= 1 \Rightarrow x + 3x + x + 3x + x + 3x = 1$
 $\Rightarrow 12x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{12}$

$\Rightarrow P(2) = P(4) = P(6) = \frac{3}{12}, P(1) = P(3) = P(5) = \frac{1}{12}$

احتمال وقوع اعداد اول در پرتاب تاس $P(\{2, 3, 5\})$

$= P(2) + P(3) + P(5) = \frac{3}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$

احتمال مشاهده اعداد ۲ یا ۳ $P(\{2, 3\}) = P(2) + P(3)$

$= \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

۱۲- B : پیشامد این که جمع ۲ عدد روشده کم تر از ۶ باشد.

A : پیشامد این که حداقل یکی از تاس های روشده ۲ باشد.

$B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)\}$

۱- هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره نامیده می شود.

۲- جدول ارزش گزاره ها را به شکل زیر می کشیم. با توجه به یکسان بودن دو ستون آخر، داریم:

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$p \wedge \sim q$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	F

۳- گزاره دارای سور عمومی به ازای $x = 1$ نادرست است؛ پس ارزش نادرست دارد. گزاره دارای سور وجودی به ازای $y = -1$ درست است؛ پس ارزش آن درست است؛ بنابراین ارزش گزاره مرکب داده شده به صورت $F \vee T \equiv T$ بوده و همواره درست است. $F \vee T \equiv T$.

نقیض گزاره داده شده، به صورت زیر است:

$\sim[(\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2-1}{x-1} = x+1) \vee (\exists y \in \mathbb{R}; y < 0 \wedge y^2 \leq 1)]$

$[\exists x \in \mathbb{R}; \sim(\frac{x^2-1}{x-1} = x+1)] \wedge [\forall y \in \mathbb{R}; \sim(y < 0 \wedge y^2 \leq 1)]$

$(\exists x \in \mathbb{R}; \frac{x^2-1}{x-1} \neq x+1) \wedge (\forall y \in \mathbb{R}; y \geq 0 \vee y^2 > 1)$

۴- به جای اثبات حکم داده شده، عکس نقیض آن را ثابت می کنیم؛ چون اثبات آن ساده تر است.

(a عددی فرد است. $\Rightarrow a^3$ عددی فرد است.)

(a^3 عددی زوج است. $\Rightarrow a$ عددی زوج است.)

چنانچه a عددی زوج باشد، یعنی $a = 2k$ ، خواهیم داشت:

$a^3 = (2k)^3 = 8k^3 = 2(\underbrace{4k^3}_{k' \in \mathbb{Z}}) = 2k'$

در نتیجه a^3 عددی زوج است.

۵- $2^{k+1} - 1 = 2^{k-1} + 47 \Rightarrow 2^{k+1} - 2^{k-1} = 48$

$\Rightarrow 2^{k-1}(2^2 - 1) = 48 \Rightarrow 2^{k-1} = 16 \Rightarrow k-1 = 4 \Rightarrow k = 5$

۶- سمت راست تساوی $= (A - C) - (B - C)$

$= (A \cap C') - (B \cap C')$

$= (A \cap C') \cap (B \cap C')' = (A \cap C') \cap (B' \cup C)$

$= A \cap (C' \cap (B' \cup C)) = A \cap ((C' \cap B') \cup \underbrace{(C' \cap C)}_{\emptyset})$

$= A \cap (C' \cap B') = A \cap (B' \cap C') = (A \cap B') \cap C'$

$= (A \cap B') - C = (A - B) - C =$ سمت چپ تساوی

(الف-۷)

$\left. \begin{matrix} X \subseteq A \\ X \subseteq A' \end{matrix} \Rightarrow (X \cap X) \subseteq (A \cap A') \Rightarrow X \subseteq \emptyset \right\} \Rightarrow \emptyset \subseteq X$

$\Rightarrow X = \emptyset$

(ب) برای اثبات این که $B \subseteq A'$ باید نشان دهیم که:

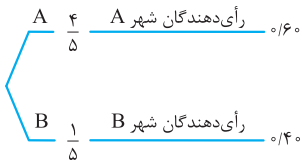
$(\forall x; x \in B \Rightarrow x \in A')$

$\forall x; (x \in B \Rightarrow x \notin B' \xrightarrow{A \subseteq B'} x \notin A \Rightarrow x \in A')$

$\forall x; (x \in B \Rightarrow x \in A') \Rightarrow B \subseteq A'$ در نتیجه داریم:

B: پیشامد این که شخص انتخاب شده از شهر B باشد.

$$P(A) = 4P(B), P(A) + P(B) = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{4}{5}, P(B) = \frac{1}{5}$$



$P(R) = P(\text{شخص انتخاب شده رأی داده باشد})$

$$= P(A) \cdot P(R|A) + P(B) \cdot P(R|B)$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{60}{60} + \frac{1}{5} \times \frac{40}{40} = \frac{28}{50} \Rightarrow P(R) = \frac{28}{50}$$

$$P(A|R) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{P(A) \cdot P(R|A)}{P(R)} = \frac{\frac{4}{5} \times \frac{60}{60}}{\frac{28}{50}} = \frac{6}{7}$$

۱۶- الف) پیشامد درست جواب دادن به سؤال A_i نشان می‌دهیم.

پیشامد پاسخ‌دادن یا پاسخ‌ندادن به سؤالات مختلف مستقل از هم هستند:

$$P(A_i) = \frac{1}{5}, P(A'_i) = \frac{4}{5}$$

$$\text{الف) } P(A_1 \cap A'_2 \cap A_3 \cap A'_4 \cap \dots \cap A'_8)$$

$$= P(A_1)P(A'_2)P(A_3)P(A'_4) \dots P(A'_8)$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{4}{5} = \left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5}\right)^4$$

ب) ابتدا سه سؤالی را که درست جواب داده می‌شود را انتخاب می‌کنیم

که به $\binom{8}{3}$ حالت امکان‌پذیر است. احتمال درست جواب‌دادن به هر

یک از سؤالات $\frac{1}{5}$ و احتمال غلط جواب‌دادن به هر سؤال $\frac{4}{5}$ است؛ پس

۳ بار $\frac{1}{5}$ و ۵ بار $\frac{4}{5}$ در هم ضرب می‌شوند.

$$P(x=3) = P\left(\binom{8}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^5\right)$$

$$A = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (1,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2)\}$$

$$A \cap B = \{(1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2)\}$$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

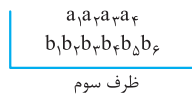
۱۳- A: پیشامد این که گوی اول سفید باشد.

B: پیشامد این که گوی دوم آبی باشد.

C: پیشامد این که گوی سوم آبی باشد.

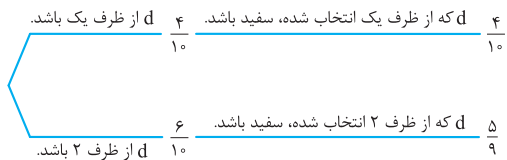
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$$

$$= \frac{3}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{12}$$



۱۴- روش ۱:

نمودار درختی



$$P = \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{16}{100} + \frac{30}{90} = \frac{44}{900}$$

روش ۲: D را پیشامد سفیدبودن مهره انتخاب شده و B_1 و B_2 را به

ترتیب پیشامد این که مهره انتخاب شده، از ظرف ۱ یا ۲ انتخاب شده باشد، تعریف می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$P(D) = P(D \cap B_1) + P(D \cap B_2)$$

$$= P(B_1) \cdot P(D|B_1) + P(B_2) \cdot P(D|B_2)$$

$$= \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{16}{100} + \frac{30}{90} = \frac{144 + 300}{900} = \frac{444}{900}$$

۱۵- R: پیشامد این که شخص انتخاب شده رأی داده باشد.

A: پیشامد این که شخص انتخاب شده از شهر A باشد.